

Теорема Котельникова или теорема Найквиста?

Основы радиотехники мы, студенты Радиотехнического факультета, изучали на кафедре Основ радиотехники Московского энергетического института. Заведовал кафедрой В.А. Котельников. Он совмещал эту должность, поэтому мы видели его не часто. Зато он прочитал нам самую первую и очень интересную лекцию на первом курсе – «Введение в специальность»!

Учились по его книгам и учебным планам – он классик теоретической радиотехники, его имя вписано в историю развития этой науки.

Основной вклад В.А. Котельников внес в теорию потенциальной помехоустойчивости.

Его докторская диссертация «Теория потенциальной помехоустойчивости» была представлена ученому совету Московского энергетического института в конце 1946 г., а в январе 1947 г. — успешно защищена.

Теория Котельникова долгое время (до ее опубликования в 1956 г. в виде отдельной книги) не пользовалась широкой известностью даже на родине.

Мировая научная общественность также ничего не знала о ней до 1959 г., когда она была переведена на английский язык. Поэтому многие ее положения через несколько лет были независимо открыты зарубежными учеными.

В те годы стояла проблема повышения чувствительности радиолокационных приемников, так как это приводило к увеличению дальности действия радиолокаторов. В США и в Англии над такими вопросами работали большие коллективы. Одним из первых, кто обратил внимание на то, что математическим фундаментом, на котором может быть построена теория оптимального приема сигналов на фоне шумов, является теория вероятностей, был американский ученый А. Зигерт. В книге «Пороговые сигналы», изданной в 1950 г., им был написан раздел, в котором эта теория применялась к задачам оптимальной обработки сигналов, принимаемых на фоне шумов. Поэтому сейчас введенный Котельниковым в обращение термин носит двойное название: «Критерий идеального наблюдателя Котельникова – Зигерта».

Поскольку теория оптимального приема основывается на теории вероятностей, скажем несколько слов об этой науке.

Почти всегда среди студентов-физиков и студентов-химиков обсуждается вопрос о сомнительности факта, что основная дисциплина, изучаемая на соседнем факультете, может называться наукой.

Например, физики, как сто тридцать пятое доказательство того, что химия не наука, приводят факт наличия в России двух журналов: «Наука и жизнь» и «Химия и жизнь». Они говорят: «Если бы химия была наукой, то не было бы необходимости в двух журналах».

Теория вероятностей как наука началась в 1933 г с работы А.Н. Колмогорова «Основные понятия теории вероятностей», опубликованной на немецком языке. К тому времени уже все основные формулы теории вероятностей были давно известны и ими широко пользовались, но ответить на вопрос, что такое вероятность, никто не мог. Определения типа: «Вероятность – это предел частоты событий при условии многократного повторения опытов, когда соблюдается то-то и то-то» не годились, поскольку ставили вопрос о природе

или происхождении вероятностей, что и до сих пор остается проблемой.

Например, какой-то «датчик истинно случайных чисел» выдал случайную последовательность, которую записали в память компьютера, а потом стали ее использовать для каких-то целей. Когда писали в память эту последовательность, никто не возражал что она «истинно случайна», но когда извлекли ее из памяти, все возмутились: «Какая же она случайная? Мы точно знаем все ее значения!»

Как же отделить «случайную» последовательность чисел от «нечистой», в которую она превратилась за несколько секунд без видимых на то причин?

А «датчики случайных чисел», которые есть в программном обеспечении каждого компьютера? Там-то они вообще получаются по детерминированным алгоритмам!

Выход из порочного круга предложил А.Н. Колмогоров: «Давайте обойдем неразрешимые вопросы и примем несколько аксиом, которых никто оспаривать не будет, а на их основе создадим строгую науку, им не противоречащую. Введем поле вероятностей, а на этом поле меру, принимающую значения от нуля до единицы, которую и назовем вероятностью. На этом этапе вообще оставим в стороне вопрос о физическом смысле вероятности. Вероятность – это мера, и понятие это – математическое».

Вот точная формулировка аксиом, которые предложил А.Н. Колмогоров:

Пусть Ω — множество элементов ω , которые мы будем называть элементарными событиями, а F — множество подмножеств из Ω . Элементы множества F будем называть случайными событиями (или просто — событиями), а Ω — пространством элементарных событий.

I. F является алгеброй множеств.

II. Каждому множеству A из F поставлено в соответствие неотрицательное действительное число $P(A)$, которое называется вероятностью события A .

III. $P(\Omega) = 1$.

IV. Если события A и B не пересекаются, то

$$P(A + B) = P(A) + P(B)$$

Совокупность объектов Ω, F, P , удовлетворяющая аксиомам I-IV, будем называть полем вероятностей.

А если совсем по-простому: «Давайте узаконим то, что уже и так всем понятно. Это позволит нам двигаться вперед, пользуясь принципами математики. Если кто-то с чем-то не согласен – пусть еще раз прочтет аксиомы. Либо он их принимает и соглашается с нами, либо не принимает и создает свою отдельную науку».

Рассказывают анекдот:

– Два математика решили заняться физикой. Разъехались по домам и обложились учебниками. Звонок одного из них другому: «Послушай, а что такое энтропия?» Ответ коллеги: «Это – параметр!» Из трубки облегченно: «Ну, спасибо! Теперь мне все стало понятным!»

Теория вероятностей положена в основу теоретической радиотехники и математической теории информации.

Имя В.А. Котельникова связано с теоремой отсчетов. Долгое время я, как и все окружающие, пользовался исключительно термином «Теорема отсчетов Котельникова». Теперь сам говорю: «Теорема отсчетов Найквиста». Причин для этого несколько:

- во-первых, собеседники не понимают, о чем идет речь, если я упомяну теорему Котельникова;
- во-вторых, если все окружающие убеждены в одном и том же, сам начинаешь в это верить.

Эпизод из учебного фильма для студентов-психологов.

Группу детей из детского сада поделили на две части. Первая часть детей была подготовлена к эксперименту: их просили называть белый лист бумаги черным, а черный – белым. Сначала вызывали детей из первой подготовленной группы, потом стали чередовать их с неподготовленными детьми. Подготовленные дети уверенно чер-

ное называли белым, а белое черным. Первый неподготовленный ребенок был в полной растерянности и не знал, что сказать. После душевных мучений он белое назвал черным. Это было «закреплено» следующим подготовленным участником эксперимента, и для всех черное стало белым, а белое черным.

Кто же был первым?

Вот что говорит Интернет о теореме Найквиста и теореме Котельникова:

История открытия

Хотя в западной литературе теорема часто называется теоремой Найквиста со ссылкой на работу 1928 года «*Certain topics in telegraph transmission theory*», в этой работе речь идёт лишь о требуемой полосе линии связи для передачи импульсного сигнала (частота следования должна быть меньше удвоенной полосы). Таким образом, в контексте теоремы отсчётов справедливо говорить лишь о частоте Найквиста. Примерно в это же время Карл Купфмюллер получил тот же результат. О возможности полной реконструкции исходного сигнала по дискретным отсчётам в этих работах речь не идёт. Теорема была предложена и доказана В.А. Котельниковым в 1933 году в работе «О пропускной способности эфира и проволоки в электросвязи», в которой, в частности, была сформулирована одна из теорем следующим образом: «Любую функцию $f(t)$, состоящую из частот от 0 до f_c , можно непрерывно передавать с любой точностью при помощи чисел, следующих друг за другом через $1/2f_c$ секунд». Независимо от него эту теорему в 1949 (через 16 лет) году доказал Клод Шеннон, поэтому в западной литературе эту теорему часто называют теоремой Шеннона. В 1999 году Международный научный фонд Эдуарда Рейна (Германия) признал приоритет В.А. Котельникова, наградив его премией в номинации «за фундаментальные исследования» за впервые математически точно сформулированную и доказанную в аспекте коммуникационных технологий теорему отсчётов.

Идеи носятся в воздухе, и обычно они уже подготовлены предыдущим развитием науки и техники. Попов и Маркони сделали свои приборы практически одновременно. Маркони, правда, был куда более предприимчив. Если первая радиограмма Попова была «Генрих Герц», то при демонстрации военным своей системы, Маркони соединил приемник с пушкой. Он нажал на кнопку передатчика, и пушка, находящаяся на расстоянии сотни метров, выстрелила. Грохот стоял большой (военные это любят!), «и потекли деньги».

В 40-х годах американцы, знакомясь с архивами, вообще пришли к выводу, что на самом деле радио изобрел Никола Тесла. Кстати, он очень не любил Маркони и считал его аферистом.

Так кто же изобрел радио?

По этому поводу академик В.В. Мигулин, наш бывший директор, сказал:

– Я считаю неправильным связывать появление радио с именем одного человека. Ведь если бы не было исследований и открытий Максвелла, Фарадея, Эрстеда, Герца, то не было бы ни Маркони, ни Попова как изобретателей.

Ричард Хемминг

В книге Стефана Цвейга «Звездные часы человечества» есть рассказ «Гений одной ночи» об офицере французской армии Руже де Лиле, написавшем в течение одной ночи в пылу охватившего его вдохновения знаменитую «Марсельезу». Это было в 1792 в революционном Марселе. Песня в течение нескольких дней распространилась по Франции, быстро приобрела колоссальную популярность во всём мире и впоследствии стала национальным гимном Французской республики. История сохранила имя Руже в памяти потомства благодаря этой единственной песне.

По аналогии Ричарда Хэмминга можно назвать «гением одной идеи». Он сформулировал ее в 1950 в своей единственной научной статье, посвящённой кодам для коррекции ошибок. Статья содержала конструкцию блочного кода, корректирующего одиночные ошибки, которые возникают при передаче сообщений.

Ричард Хэмминг постоянно вёл активные научные исследования, однако знаменитой стала его единственная работа в области теории информации, составляющая по своему объёму ничтожный процент его научного творчества. Эта статья быстро получила мировую известность и принесла ему заслуженную славу.

Хэмминг был первым, кто предложил конструктивный метод построения кодов с избыточностью и простым декодированием. Его труд предопределил направление большинства работ в этой области, последовавших позже.

Пионерская работа Хэмминга была отмечена многими наградами. В 1968 он стал почётным членом Института инженеров по электротехнике и электронике (IEEE) и был награждён премией Тьюринга Ассоциации компьютерных технологий. За исключительный вклад в развитие информационных наук и систем в 1979 ему присуждена премия Эммануила Пиоре. В 1980 его избрали членом Национальной Академии инженерных наук, в 1981 он получил премию Гарольда Пендера от Пенсильванского университета, а в 1988 – почётную медаль IEEE. В 1996 в Мюнхене за работу по кодам, корректирующим ошибки, Хэмминг был удостоен престижной премии Эдуарда Рейма в размере \$130000.

В его честь Институт инженеров по электротехнике и электронике учредил медаль, которой награждаются ученые, внесшие значительный вклад в теорию информации.

Коды, способные корректировать ошибки (в каналах связи, в цифровых вычислительных машинах и т.п.) при обработке сигналов, были предложены Хэммингом ещё до 1948, когда была опубликована знаменитая статья Шеннона «Математическая теория связи», заложившая прочную основу теории в данной области.

В этой статье Шеннон, ссылаясь на исследование, выполненное в 1947 его сослуживцем по лаборатории Белла Ричардом Хэммингом, описал в качестве примера простой код длины 7, корректирующий все одиночные ошибки. Публикация же оригинального материала Хэмминга по патентным соображениям была задержана до апреля 1950. Следует отметить, что пример корректирующего ошибки кода, приведенный в упомянутой статье Шеннона, инициировал исследование другого американского учёного, М.Е. Голя. Голей независимо от Хэмминга открыл коды, корректирующие одиночные ошибки. В 1949 (т.е. раньше Хэмминга) он опубликовал короткую заметку (всего на полстраницы) о своих результатах в Трудах IEEE.

Работа Хэмминга сыграла ключевую роль в последующем развитии теории кодирования и стимулировала обширные исследова-

ния, выполненные в последующие годы. В 1956 г. Давид Слепьян первым изложил теорию кодов с проверкой четности на серьезной математической основе. Главный сдвиг в области теории кодирования произошел, когда французский ученый А. Хоквингем (1959) и американцы Р.К. Боуз и Д.К. Рой-Чоудхури (1960) нашли большой класс кодов (коды БЧХ), исправляющих кратные ошибки. Американские исследователи И.С. Рид и Г. Соломон (1960) нашли связанный с кодами БЧХ класс кодов для недвоичных каналов.