

Приложение 1.

Систематическая ошибка стандартной ПВГО

Покажем, что стандартный вариант ПВГО имеет систематическую ошибку в описании рефракции волн.

В качестве исходного волнового уравнения будем использовать уравнение Клейна-Гордона (УКГ)

$$\nabla^2 U - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - \frac{\omega_L^2}{c^2} U = 0 \quad (1)$$

которому соответствует дисперсионное соотношение, задающее закон дисперсии:

$$\omega^2 = \omega_L^2 + k^2 c^2 \quad (2)$$

Здесь ω – частота волны, k – волновое число, ω_L – собственная частота осцилляторов поля (пространственная характеристика среды распространения, для плазмы – ленгмюровская частота электронов), c – скорость света в вакууме.

Это наиболее распространенный в радиодиапазоне вид дисперсии, поскольку он существует в ионосфере – самой объемной приземной среде, где распространяются радиоволны. Кроме этого, УКГ является асимптотическим волновым уравнением для любых видов дисперсии электромагнитных волн при повышении частоты, что выделяет его из всех других волновых уравнений.

Общепринятый стандартный подход к выводу уравнений ПВГО начинается с представления функции волнового поля в виде бесконечного ряда по степеням большого параметра ν :

$$U(\vec{r}, t) = \exp(i\nu\psi(\vec{r}, t)) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{A_m(\vec{r}, t)}{(i\nu)^m} \quad (3)$$

Этот ряд принято называть лучевым рядом, в котором ψ и A_m фазовая и бесконечная последовательность амплитудных функций, зависящих от пространственных и временной координат.

Подставляя лучевой ряд (3) в УКГ (1), получим бесконечную цепочку уравнений, первое из которых имеет вид:

$$(\nabla \psi)^2 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} \right)^2 + \frac{\omega_L^2}{c^2} = 0 \quad (4)$$

Определим в (4) $\nabla \psi = \vec{k}$ как локальный волновой вектор, а $-\partial \psi / \partial t = \omega$ как локальную частоту, получим уравнение эйконала:

$$\vec{k}^2 - \frac{\omega^2}{c^2} + \frac{\omega_L^2}{c^2} = 0 \quad (5)$$

Это уравнение задает связь между волновым вектором и частотой в каждой точке пространства и времени. Но траектория волны определяется не только точкой, но и некоторой ее окрестностью. С математической точки зрения – это малая δ -окрестность, необходимая для существования производных, а с физической точки зрения – это зона Френеля, соизмеримая с длиной волны и периодом осцилляций.

Условие применимости геометрической оптики, которое одновременно разделяет волновые эффекты на рефракционные и дифракционные, имеет вид:

$$\nu = \min \left\{ \frac{T_p}{\tau, \tau_0}; \frac{T_w}{\tau, \tau_0}; \frac{L_p}{\lambda, \lambda_0}; \frac{L_w}{\lambda, \lambda_0} \right\} \gg 1 \quad (6)$$

Здесь ν – большой параметр, $\tau \sim 2\pi / \omega$ – средний период волны, $\lambda \sim 2\pi / k$ – средняя длина волны, τ_0 и λ_0 – временные и пространственные масштабы дисперсии, T_p и L_p – временные и пространственные масштабы вариаций параметров среды, T_w и L_w – временные и пространственные масштабы вариаций волнового поля.

Явление рефракции определяется первыми производными частоты и волнового вектора, которые можно получить путем дифференцирования уравнения эйконала (5). Для простоты направим волновой вектор вдоль оси x .

$$\frac{\partial \vec{k}}{\partial x} = \vec{e}_x \left(\frac{\omega}{c^2 k_x} \frac{\partial \omega}{\partial x} - \frac{\omega_L}{c^2 k_x} \frac{\partial \omega_L}{\partial x} \right) + \vec{e}_y \left(\frac{\omega}{c^2 k_x} \frac{\partial \omega}{\partial y} - \frac{\omega_L}{c^2 k_x} \frac{\partial \omega_L}{\partial y} \right) \quad (7)$$

Используем свойство волнового вектора $\nabla \times \vec{k} = \nabla \times (\nabla \psi) = 0$, т.е. «ротор градиента скалярной функции (фазы ψ) всегда равен нулю» и получим связь между частными производными:

$$\frac{\partial k_x}{\partial y} = \frac{\partial k_y}{\partial x} \quad (8)$$

Отсюда:

$$\frac{\partial \vec{k}}{\partial y} = \vec{e}_x \left(\frac{\omega}{c^2 k_x} \frac{\partial \omega}{\partial y} - \frac{\omega_L}{c^2 k_x} \frac{\partial \omega_L}{\partial y} \right) \quad (9)$$

В произвольной точке пространства и времени зададим следующие параметры волнового поля и среды: несущую частоту ω , частотный градиент

$\nabla \omega = \vec{e}_x \partial \omega / \partial x + \vec{e}_y \partial \omega / \partial y$, собственную частоту среды ω_L и ее градиент $\nabla \omega_L = \vec{e}_x \partial \omega_L / \partial x + \vec{e}_y \partial \omega_L / \partial y$.

Остальные параметры поля – волновое число и его производные определяются из (5), (7) и (9).

Модель поля стандартной ПВГО для точки и ее окрестности представляет собой локально плоскую однородную монохроматическую волну с медленно меняющимися параметрами:

$$U = A_0 \exp \left[i \left(k_x + \frac{\partial k_x}{\partial x} x + \frac{\partial k_x}{\partial y} y \right) x + i \frac{\partial k_y}{\partial x} xy - i \left(\omega + \frac{\partial \omega}{\partial x} x + \frac{\partial \omega}{\partial y} y \right) t \right] \quad (10)$$

Теперь, если подставим модель поля (10) в волновое уравнение (1), то увидим, что наибольшая ошибка определяется членом:

$$-2 \left(\frac{\omega}{c^2} \frac{\partial \omega}{\partial y} - \frac{\omega_L}{c^2} \frac{\partial \omega_L}{\partial y} \right) A_0 y \quad (11)$$

Величина этой ошибки соответствует величине рефракционных эффектов и появление ее в уравнении невязки объясняется соотношением (8). Одна из производных при подстановке в волновое уравнение компенсируется парными производными частоты волны и среды, а вторая, имеющая точно такую же величину, остается не скомпенсированной.

Таким образом, стандартная общепринятая локально-плоская модель поля не удовлетворяет исходному волновому уравнению в об-

ласти рефракции и не может являться его асимптотикой на больших расстояниях.

Структура систематической ошибки (11) стандартной модели показывает, что в ней отсутствует учет поперечной частотной модуляции волны (дисперсионной рефракции) и неправильно учтена неоднородность среды.

Причина появления систематической ошибки графически изображена на рис.23.

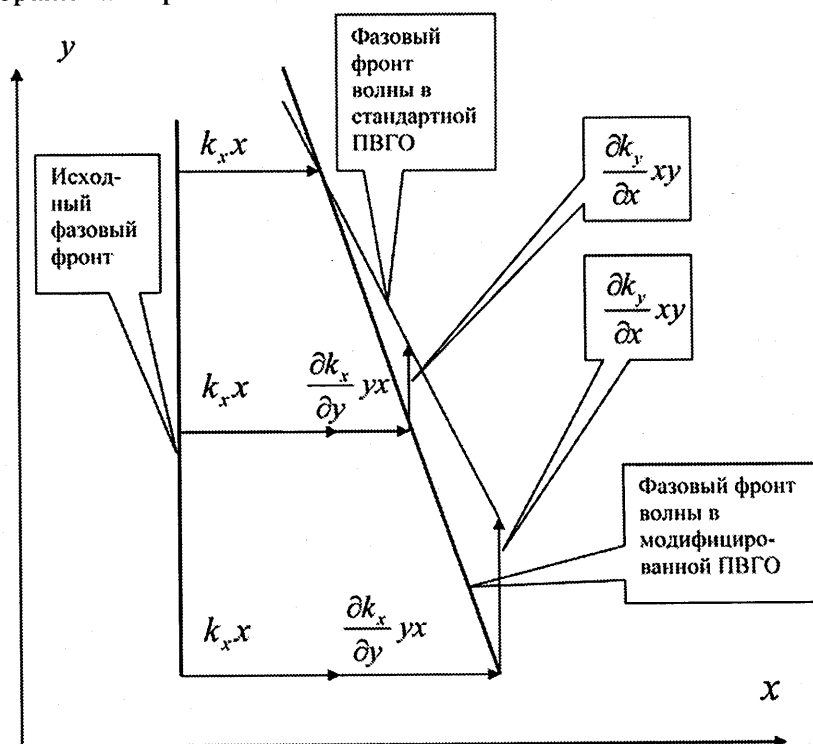


Рис. 24. Причина систематической ошибки в стандартной ПВГО.

Приложение 2.

Дисперсионная рефракция с точки зрения принципа суперпозиции

Волновые процессы при наличии дисперсионной рефракции должны подчиняться принципу суперпозиции, поскольку исходные уравнения являются линейными, т.е. решение для суммы волн равно сумме решений для каждой из них.

Сразу же подчеркнем, что для энергетических характеристик волны, например для мощности или энергии, этот принцип не выполняется, поскольку они являются нелинейными функциями поля. Однако на практике именно энергетические характеристики как раз и представляют интерес.

В наиболее распространенной прикладной задаче радиофизики – передаче сообщений с помощью радиоволн – достоверность определяется энергией сигнала. Более того, само понятие распространения волн связывают с распространением волновой энергии. Например, в ПВГО (как в обычной, так и в модифицированной) групповая скорость – это средняя за период колебания скорость передачи энергии.

Мы, в силу линейности задачи, можем находить решения по частям, для отдельных составляющих поля, а потом их суммировать. Но всегда будем помнить, что процесс передачи энергии можно получить только по полному решению, когда все составляющие поля просуммированы – здесь принцип суперпозиции не выполняется.

В спектральном подходе, т.е. при представлении поля в виде совокупности гармонических составляющих, дисперсионная рефракция объясняется эффектом фокусировки частотных компонент подобно тому, как происходит сжатие продольно-модулированной по частоте волны (или сигнала с линейной частотной модуляцией – ЛЧМ) при наличии дисперсии в одномерном случае: волна будет иметь максимальную мощность в той точке пространства и в тот момент времени, когда полностью со-

впадут фазы всех спектральных компонент. Этот пример рассматривается в учебниках.

В одномерном случае возможно только перераспределение мощности в пространстве, общая энергия остается постоянной для каждой его точки. Здесь, естественно, эффект дисперсионной рефракции не может наблюдаться принципиально.

При переходе к двум или трем измерениям появляется возможность перераспределения энергии в пространстве. Для этого необходимо, чтобы спектральные компоненты имели разное направление волнового вектора, как это имеет место при поперечной частотной модуляции. Тогда кроме продольной фокусировки, возникнет еще и поперечная, а результатом их совместного действия будет пространственное перераспределение энергии. Естественно, полная энергия во всей пространственной области останется неизменной.

Таким образом, дисперсионная рефракция – это ни что иное как дисперсионные искажения волны для многомерного случая, когда частотная дисперсия приводит к поперечному переносу энергии.

Для использования эффекта дисперсионной рефракции в неоднородных средах не обязательно сооружать специальные антенны, формирующие поперечную частотную модуляцию, а можно использовать трансформацию продольной модуляции в поперечную на естественных неоднородностях среды. В этом случае могут быть использованы обычные, даже не направленные антенны, а управление волной происходит путем амплитудно-частотной модуляции излучаемого импульса.

Рассмотрим задачу, как получить максимальную концентрацию энергии поля на высоте 38 км в заданной полосе частот. Выберем полосу 500 КГц, спектральные компоненты поля будем рассчитывать методом параболического уравнения теории дифракции. Нас будет интересовать поле на удалении от источника в 1700 км, после отражения от ионосферы, что обеспечивает условия применимости по углам для параболического приближения. Расчет каждой спектральной компоненты в начальной точке начнем с нулевой фазы. В выбранную нами конечную точку они придут с какими-то своими фазами. Если в этой конечной точке все фазы приравнять, это

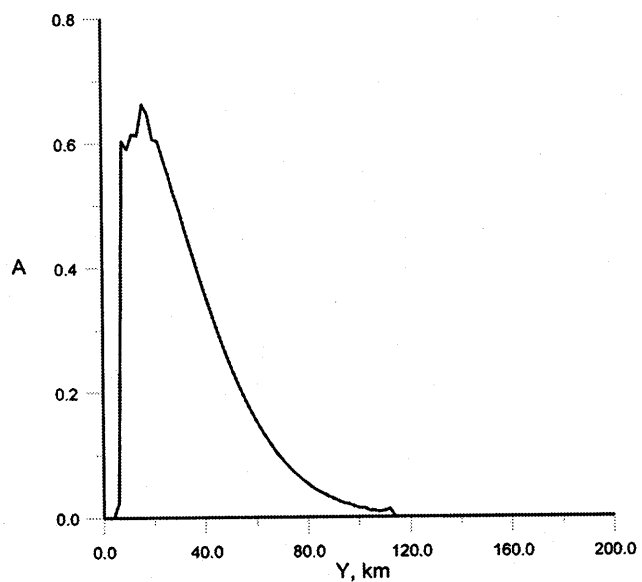


Рис. 25. Зависимость амплитуды поля на расстоянии 1700 км для одной из частотных компонент.

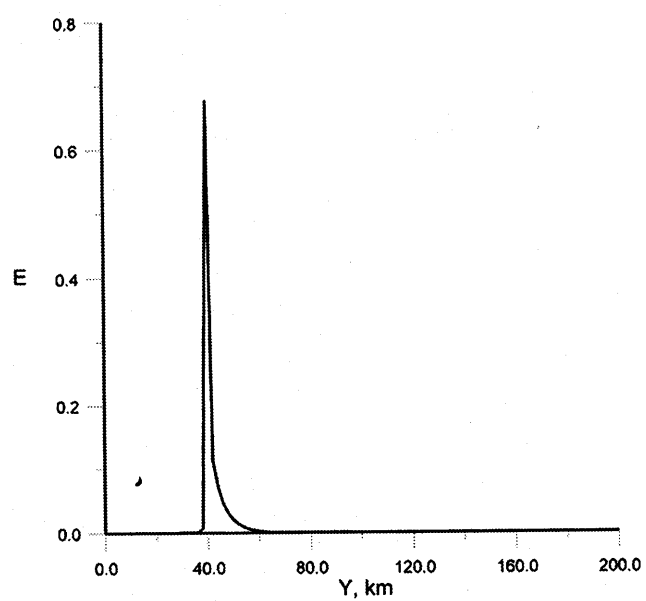


Рис. 26. Энергия волнового поля, сфокусированного на высоте 38 км.

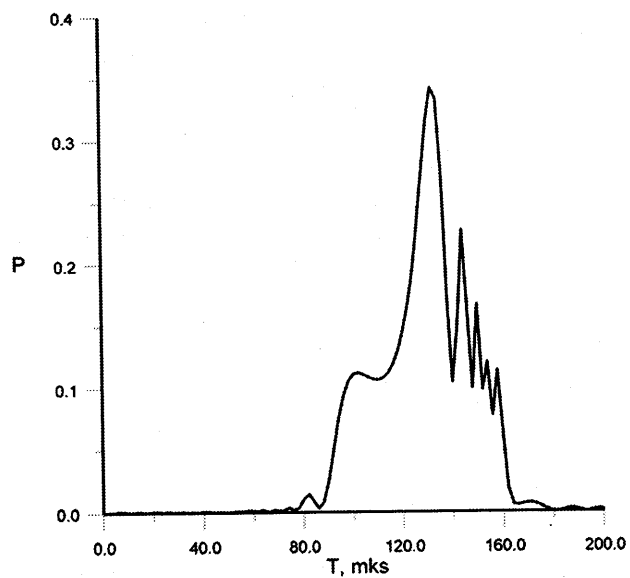


Рис. 27. Функция мощности начального поля, обеспечивающего фокусировку энергии на высоте 38 км.

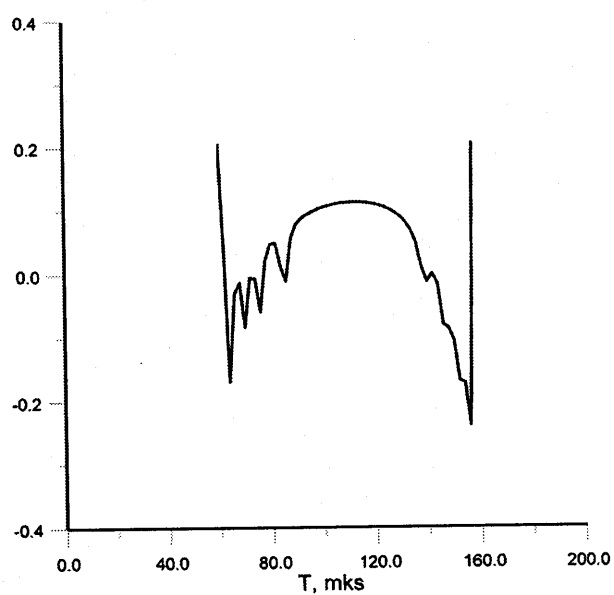


Рис. 28. Функция фазы начального поля, обеспечивающего фокусировку энергии на высоте 38 км.

будет эквивалентно соответствующему отрицательному смещению фаз частотных компонент поля в начальной точке. Зная амплитуды и фазы в начальной и конечной точке, мы можем, суммируя спектральные компоненты, рассчитать поле в конечной точке, а также начальное поле, которое приводит к такому результату.

Как следует из рисунков 25-28, сфокусировав поле в выбранной точке путем излучения определенного импульса, можно увеличивать энергию волны в сотни раз. Мы получили этот результат методом суперпозиции спектральных компонент. Физической основой такой возможности является эффект дисперсионной рефракции. При распространении продольно-неоднородного начального импульса (рис. 27-28) в неоднородной ионосфере у него появляется поперечная частотная модуляция и возникает эффект дисперсионной рефракции.

На рис. 29 показаны лучевые траектории для волны без продольной частотной модуляции для центральной монохроматической волны, поле которой мы рассчитывали в этой задаче методом параболического уравнения. Видно, что на конечной дальности фокусировки лучей нет.

На рисунке 30 приведены траектории лучей для начального импульса с продольной частотной модуляцией. Величина коэффициента продольной модуляции рассчитывалась по фазовой характеристике синтезированного излученного импульса (рис. 28) для максимальной мощности (рис. 27). Здесь видно, что на высоте 38 км произошла фокусировка, причиной которой стал эффект дисперсионной рефракции.

Еще один способ объяснения дисперсионной рефракции изображен на рис. 31. Различные частотные компоненты поля проникают вглубь ионосферы из-за частотной дисперсии на разную высоту, формируя большую виртуальную апертуру. Фазируя эту апертуру путем формирования начального импульса, можно управлять радиолучем, как в обычной фазированной антенной решетке (ФАР), направляя максимальную энергию в выбранную точку.

Почему же на эффект дисперсионной рефракции не натолкнулись экспериментально, ведь в коротковолновом диапазоне работает огромное количество радиосредств? Эта ситуация объясняется очень просто – разработчики приборов боятся дисперсионных

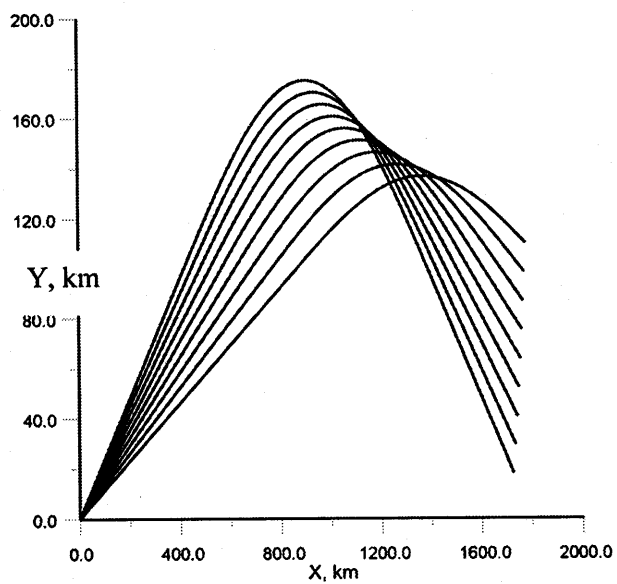


Рис. 29. Пространственные траектории лучей для начального импульса без продольной модуляции.

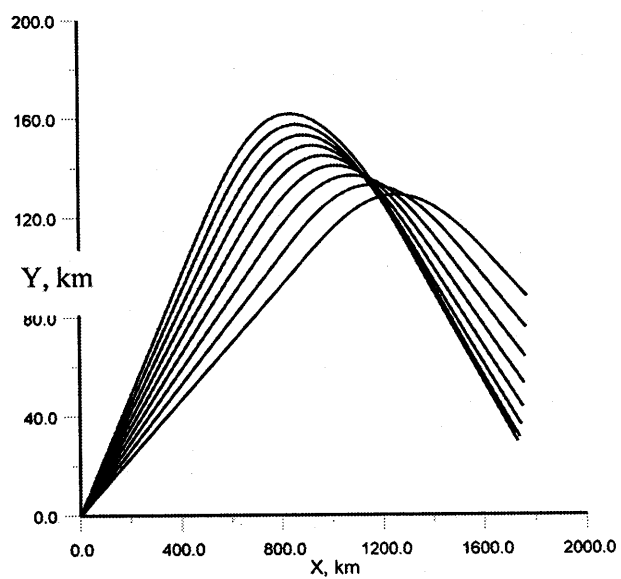


Рис. 30. Пространственные траектории лучей для начального импульса с продольной частотной модуляцией.

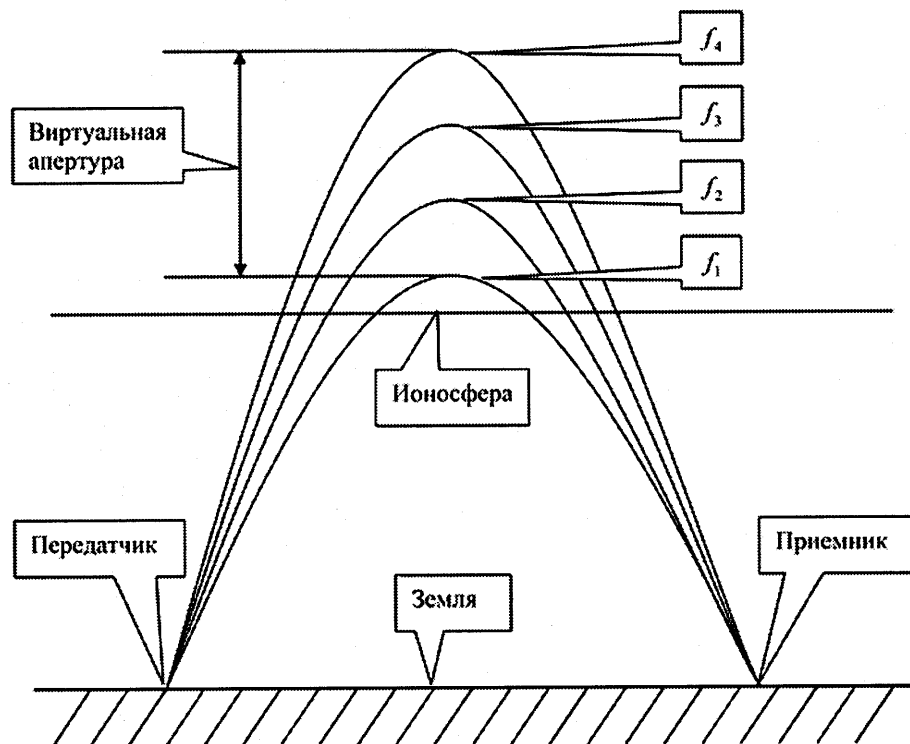


Рис.31. Фокусировка поля виртуальной апертурой.

искажений и поэтому в подавляющем большинстве случаев полоса передаваемого сигнала не превышает 100 КГц. Дальше начинаются дисперсионные искажения формы сигнала, в том числе и дисперсионная рефракция. Например, такую полосу 100 КГц занимал зондирующий сигнал загоризонтного радиолокатора 5Н32.